

確率数理工学12

再帰性と到達時刻

Def (平均到達時間と平均再帰時間)

$m(i, j)$ = 状態 i から j への平均到達時間

$$\stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} k P(T_j = k \mid X_0 = i) = E[T_j \mid X_0 = i] \\ \infty \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(if } P(T_j < \infty \mid X_0 = i) = 1 \text{)} \\ \text{(otherwise)} \end{array}$$

$\uparrow$
 $f(i, j)$

$(T_j = \inf \{n \geq 1 \mid X_n = j\})$

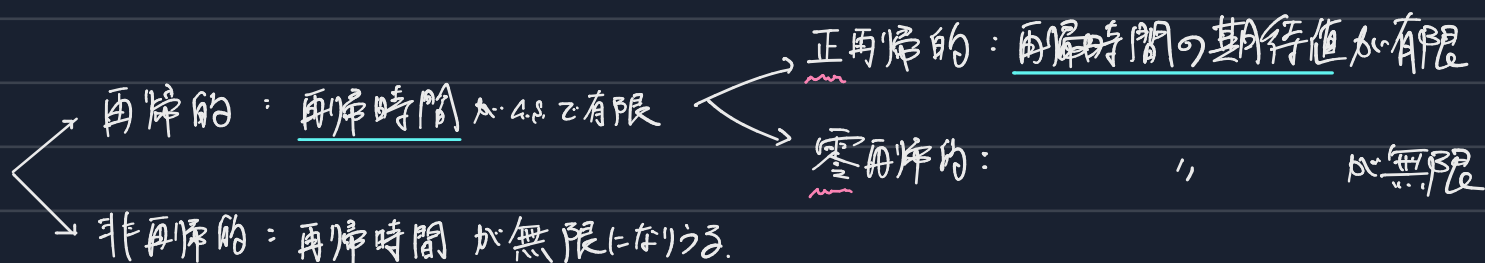
$m(i, i)$ を 平均再帰時間 と呼ぶ
 $\uparrow$
同じ

Def (正再帰性)

i : 再帰的とする. このとき.

$$\begin{cases} i \text{ が正再帰的} \iff m(i, i) < \infty \\ i \text{ が零再帰的} \iff m(i, i) = \infty \end{cases} \stackrel{\text{def}}{}$$

(非再帰的なら自動的に $m(i, i) = \infty$ である.)



平均到達時間の計算法

$$m(i,j) = \underbrace{p(i,j) \times 1}_{\substack{\uparrow \\ i \rightarrow j \text{ 1 step } \rightarrow \\ \text{到達}}} + \sum_{k \neq j} p(i,k) \left\{ \begin{array}{c} \text{次の時刻に } k \text{ へ到達} \\ \downarrow \\ 1 + m(k,j) \\ \uparrow \\ i \text{ から } k \text{ へ行ったら} \\ j \text{ へ到達するのに必要なstep数} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow m(i,j) = 1 + \sum_{k \neq j} p(i,k) m(k,j)$$

$$(\because p(i,j) + \sum_{k \neq j} p(i,k) = \sum_{k \in I} p(i,k) = 1)$$

この方程式を各 j ごとに解く.

$i=j$ とおけば平均再帰時間も求まる.

解が一意的なけりば最小の非負解 $(m(i,j))$ が与えられる.

(*)

(証明は与えないが、補足資料の吸収確率の計算と同様に示せる.)

Def (吸収確率)

i : 非再帰的な状態

j : 再帰的な状態 $\leftarrow$ (分解定理より、ある再帰的な既約成分に含まれる)

i から j への 吸収確率 $\iff$ i から j を含む再帰的な同値類への到達確率

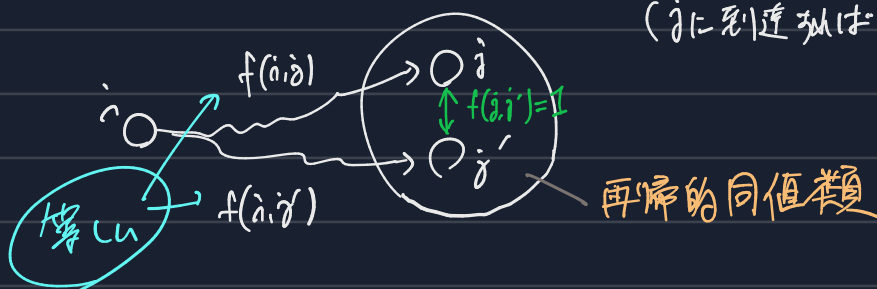
Prop j が再帰的かつ $j \rightarrow j'$ なら $f(j,j')=1$ である.

Proof 前回の講義資料より、 $f(j,j)=1$ で j が再帰的になることは示せてある.

よって、 $j \rightarrow j'$ かつ、 j' は再帰的なので、再び同様の議論により、 $f(j,j')=1$ である.

$\Rightarrow$ このことから、 $\forall j' \in C(j)$ で、 $f(i,j) = f(i,j')$ がわかる.

(j に到達するのは必ず j' にも到達し、逆もいえる)



対称性で証明

(参考) $\forall k \in C(i) \rightarrow \text{u2. } f(i, k) = f(i, j) \text{ となる証明}$

$$f(i, k) = P(T_k < \infty | X_0 = i) \geq \underbrace{P(T_j \leq T_k < \infty | T_j < \infty)}_{\substack{\uparrow \\ j \text{ を通るから } k \text{ まで到達するprob.}}} P(T_j < \infty | X_0 = i)$$

$$= \underbrace{P(T_k < \infty | X_0 = j)}_{\substack{\text{"} \\ f(j, k) = 1}} P(T_j < \infty | X_0 = i) = f(i, j)$$

k と j を逆にすれば, $f(i, k) \leq f(j, k)$ も得るので, $f(i, k) = f(i, j)$ //

吸収確率の計算方法

$C(i)$: i を含む再帰的な同値類 (関心は既約)

T : 非再帰的な元の集合

$$f(i, j) = P(i, j) +$$

$$\sum_{\substack{k \in C(j) \\ (k \neq j)}} P(i, k) f(k, j) + \sum_{k \in T} P(i, k) f(k, j) + \sum_{k \in I - C(j) - T} P(i, k) f(k, j)$$

$$\text{ここで} \quad \begin{cases} k \in C(i) & \Rightarrow f(k, j) = 1 \\ k \in I - C(i) - T & \Rightarrow f(k, j) = 0 \end{cases} \quad (\text{分解定理})$$

なので,

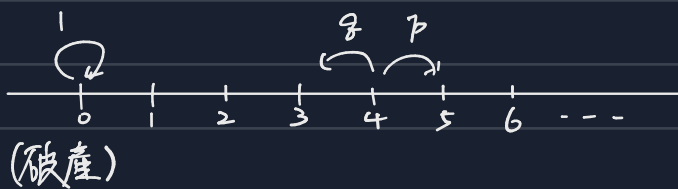
$$f(i, j) = \sum_{k \in C(j)} P(i, k) + \sum_{k \in T} P(i, k) f(k, j)$$

$\Rightarrow$ この方程式を解けば良い.

($\forall j \in C(i)$ について $f(i, j') = f(i, j)$ とおける)

解が一意的な場合は最小の非負解が与えられる.

Ex. ギャンブラーの破産確率



確率 p で $+1$ 万円
 q で -1 万円
 所持金 0 で破産

資産 n から始めて破産する確率を求める

$a(0) = 1$, $a(n)$: n から始めて破産する確率 ($= f(n, 0)$)

方程式: $a(n) = p a(n+1) + q a(n-1)$ ($n = 1, 2, \dots$)

$$a(0) = 1$$

$$\Rightarrow p [a(n+1) - a(n)] = q [a(n) - a(n-1)]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a(n) = \alpha + \beta \left(\frac{q}{p}\right)^n & (p \neq q) \\ a(n) = \alpha + \beta n & (p = q = \frac{1}{2}) \end{cases}$$

ここで $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とおく。

(i) $p < q$ のとき $0 \leq a(n) \leq 1$ (より) $\beta = 0$ (ここで $a(n) \rightarrow \infty$ となる)

よって $a(0) = 1$ から $\alpha = 1$ なのだから $a(n) = 1$ (より)

→ 必ず破産する

(ii) $p = q$ のとき $0 \leq a(n) \leq 1$ より

より $\beta = 0$

$a(0) = 1$ より $\alpha = 1$ であるから $a(n) = 1$ (より)

→ 必ず破産する

(iii) $p > q$ のとき $n \rightarrow \infty$ であるから $a(n) \rightarrow \alpha$ である。

一方、 $n = 0$ であるから $a(0) = \alpha + \beta = 1$

よって 最小の非負解は $\alpha = 0, \beta = 1$ である。

つまり、

$$a(n) = \left(\frac{q}{p}\right)^n$$

→ 運が良ければ破産しない

Thm (平均回帰時間の性質と正再帰性の条件)

任意の i, j に対し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p^{(k)}(i, j) = \frac{f(i, j)}{m(i, j)}$$

← 到達確率
← 平均回帰時間

$$j \text{ が正再帰的} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p^{(k)}(j, j) > 0$$

$\forall m(i, j) < \infty$

(証明はCronF)

直感的説明: $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p^{(k)}(i, j)$ は " i から出発して n ステップ目まで平均的に j に滞在していた時間の割合" である。
 $\rightarrow$ また、 i から j に到達する確率 $f(i, j)$ 、 j に到達したら、 $m(i, j)$ 時間後に j に戻ると。
 平均的に $\frac{1}{m(i, j)}$ の割合で j に滞在していることになる。 //

Cor I が既約 $\mathcal{Z}$ であるとする。

(i) j が正再帰的なら $\forall i \in I$ に対し

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p^{(k)}(i, j) = \frac{1}{m(i, j)} > 0$$

(ii) j が零再帰的なら、 $\forall i \in I$ に対し

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^{(n)}(i, j) = 0$$

($\because$ (i): I が既約 $\mathcal{Z}$ 、 j が正再帰的なら、 $f(i, j) = 1$ であるから $\mathcal{Z}$ に必ず到達する。
 $\therefore$ (i) は Thm 4) 示せる

(ii) は自明である。証明は省略。)

(Thm proof)

$$Z_n = \begin{cases} 1 & (X_n = j) \\ 0 & (X_n \neq j) \end{cases} \text{ とする。}$$

時刻 n まで $\mathcal{Z}$ に j にいた回数

$$N_j(n) = \sum_{k=1}^n Z_k \text{ とする。}$$

$$E[N_j(n) | X_0 = i] = \sum_{k=1}^n E[Z_k | X_0 = i] = \sum_{k=1}^n p^{(k)}(i, j) \text{ になる。}$$

(i) また $i = j$ と考える ($X_0 = i = j$)

$T_j^{(k)}$ を状態 j を k 回訪れた時間とする ($T_j^{(k)} = \inf \{n \geq 1 \mid N_j(n) \geq k\}$)

$T_j^{(0)} = 0$ とする。

これは n が無限大になる

$t_k = T_j^{(k)} - T_j^{(k-1)}$ とおす。すると、 t_k は独立同分布に従う。(Markov性)
よって、大数の強法則より

$$\frac{T_j^{(k)}}{k} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_{k-1} + t_k}{k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{a.s.} E[t_1] = E[T_j | X_0 = j] = m(j, j)$$

また、 $T_j^{(k)}$ の定義より $T_j(N_j(n)) \leq n < T_j(N_j(n)+1)$

よって、

$$\frac{T_j(N_j(n))}{N_j(n)} \leq \frac{n}{N_j(n)} < \frac{T_j(N_j(n)+1)}{N_j(n)+1} \cdot \frac{N_j(n)+1}{N_j(n)}$$

よって、

(a) $\exists \varepsilon > 0$ j が再帰的であるとき仮定より $N_j(n) \rightarrow \infty$ (a.s.)

よって、

$$\frac{n}{N_j(n)} \rightarrow m(j, j) \quad (a.s.)$$

(b) 一方、 j が非再帰的ならば $P(\lim_{n \rightarrow \infty} N_j(n) < \infty | X_0 = j) = 1$ となる。
よって、

$$\frac{n}{N_j(n)} \rightarrow \infty \quad (a.s.)$$

よって、一方、 j が非再帰的ならば $m(j, j) = \infty$ である。

$$\frac{n}{N_j(n)} \rightarrow m(j, j) \quad (a.s.) \text{ を得る。}$$

(ii) $i \neq j$ のとき、

$$\frac{T_j^{(k)}}{k} = \underbrace{\frac{t_1}{k}}_{\frac{T_j}{k}} + \frac{t_2 + \dots + t_k}{k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{a.s.} \begin{cases} m(j, j) & (T_j < \infty) \\ \infty & (T_j = \infty) \end{cases}$$

(i), (ii) より、 u_k は $1/2$ 以下

$$\begin{aligned} \frac{n}{N_j(n)} &\rightarrow \begin{cases} m(j, j) & (if \ T_j < \infty) \\ \infty & (otherwise) \end{cases} \quad (a.s.) \\ \Rightarrow \frac{N_j(n)}{n} &\xrightarrow{a.s.} \frac{1}{m(j, j)} \mathbb{1}[T_j < \infty] \quad (a.s.) \end{aligned}$$

※ $m(j, j) = 0$ ではない
(零再帰的でない)
o.k.)

※ 前問資料より、
($j(j, j) = 1$)

両辺の期待値をとれば. ル1=グの優収束定理より

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p^{(n)}(i, j) &= \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\frac{N_j(n)}{n} \mid X_0 = i \right] \\ &= E \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_j(n)}{n} \mid X_0 = i \right] \\ &= E \left[\frac{1}{m(i, j)} \mathbb{1}_{[T_j < \infty]} \mid X_0 = i \right] \\ &= \frac{1}{m(i, j)} \cdot P(T_j < \infty \mid X_0 = i) = \frac{f(i, j)}{m(i, j)} \quad // \end{aligned}$$

定常分布と極限分布

Def (定常分布)

$\pi = (\pi(1), \pi(2), \dots) : I$ 上の分布

π が定常分布 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \pi = \pi P \quad (\pi(j) = \sum_{i \in I} \pi(i) P(i, j))$
: 平衡方程式

※ Markov 連鎖で更新しても分布が変わらない.

(定常分布が存在するとは限らない)

Def (極限分布)

$\pi_n(j) := \sum_{i \in I} \pi_0(i) P^{(n)}(i, j) \quad (\pi_0 \text{ は初期分布})$

(n ステップ目にとの状態にいまあるを表す分布)

π が極限分布 $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 任意の π_0 に対し.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_n(j) = \pi(j) \quad (\forall j \in I)$$

(連続分布などの法則収束)

(極限分布が存在するとは限らない)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)} = P^{(\infty)} = \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{極限分布}$$

という行を繰り返すことになる.

↑ $\pi(j) = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$
と決まる.

Note 〇 極限分布が存在すれば、それは一意の定常分布である。

→ チェックせよ。

〇 定常分布が存在しても 極限分布が存在するとは限らない。

反例: $\pi = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \pi P = \pi$ かつ、 π は定常分布

①  しか、 $P^{(n)} = \begin{cases} P & (n: \text{奇数}) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & (n: \text{偶数}) \end{cases}$

→ 周期性がある

$\pi_0 = (1 \ 0)$ とすると。

$\pi_n = \begin{cases} (0 \ 1) & (n: \text{奇数}) \\ (1 \ 0) & (n: \text{偶数}) \end{cases}$

→ 収束しない。 極限分布は存在しない。

Thm (マルコフ連鎖の定常分布)

マルコフ連鎖は 既約 であると仮定する。

すると、以下は同値

(1) ある $j \in I$ が正再帰的

(2) 全ての $j \in I$ が正再帰的

(3) 定常分布 π が存在する。

(1), (2) より正再帰性は
クラスの数に依存)

(1), (2), (3) のうち、定常分布は一意に定まる。

$$\pi(j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n P^{(\ell)}(j, j) = \frac{1}{m(j, j)}$$

で表えられる。 (j から j に戻って来るまでの平均時間 $m(j, j) \rightarrow j$ に平均的に $\frac{1}{m(j, j)}$ の割合で滞在)

Lem 正再帰的な j に対し、

$$\mu(i) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X_n = i, T_j > n | X_0 = j)$$
 ← j を出発して
再び j に戻すまでに
とどく回数 i に依存

とすると、 $\pi(i) = \frac{\mu(i)}{m(j, j)}$ は定常分布になる。

(I の既約性は仮定してない。定常分布は一意とは限らない)

($\pi(i)$ は j を出発して j に戻すまでに、とどく回数 $i \in I$ に依存してないから表す)

(Lem の proof) まず $\mu(j) = P(X_0=j, T_j > 0 | X_0=j) = 1$ である.

($P(T_j < \infty | X_0=j) = 1$ は注意)

$$\begin{aligned} \text{また, } \sum_{i \in I} \mu(i) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i \in I} P(X_n=i, T_j > n | X_0=j) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(T_j > n | X_0=j) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(T_j \geq n | X_0=j) \\ &= E[T_j | X_0=j] = m(j, j) \end{aligned}$$

この π は確率分布になる.

$\bar{P}^{(k)}(j, i) = P(X_k=i, T_j > k | X_0=j)$ とおくと, μ の定義より

$$\sum_i \mu(i) P(i, k) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_i \bar{P}^{(l)}(j, i) P(i, k)$$

である. 右辺 = $\mu(k)$ なら $\pi(x\mu)$ は定常分布になる.

(i) ($k \neq j$ のとき)

$$\begin{aligned} &\sum_i \bar{P}^{(k)}(j, i) P(i, k) \\ &= \sum_i P(X_k=i, T_j > k, X_{k+1}=k | X_0=j) \\ &= P(T_j > k, X_{k+1}=k | X_0=j) \\ &= P(T_j > k+1, X_{k+1}=k | X_0=j) \quad (\because j \neq k) \\ &= \bar{P}^{(k+1)}(j, k) \\ \therefore \sum_{l=0}^{\infty} (\text{右辺}) &= \mu(k) \text{ となる. } (j \neq k \text{ に注意}) \end{aligned}$$

(ii) ($k = j$ のとき)

上と同様に

$$\begin{aligned} \sum_i \bar{P}^{(k)}(j, i) P(i, k) &= \sum_i P(X_k=i, T_j > k, X_{k+1}=\overset{k}{j} | X_0=j) \\ &= P(T_j = k+1 | X_0=j) \end{aligned}$$

このとき,

$$\sum_{l=0}^{\infty} (\text{右辺}) = P(T_j < \infty | X_0=j) = 1 = \mu(j)$$



(Proof of Thm)

(2) $\rightarrow$ (1) は明らか.

(1) $\rightarrow$ (2)

$i \in I$ を任意に取る. $j \in I$ は正再帰的であること.

既約性より. $i \leftrightarrow j$ である.

より. $\exists k, m \in \mathbb{N}$ 2. $p^{(k)}(i, j) > 0, p^{(m)}(j, i) > 0$ あり.

$$\begin{aligned} \frac{1}{m(i, i)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n p^{(l)}(i, i) \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+m+k} \sum_{l=1}^n \underbrace{p^{(k)}(i, j)}_{>0} p^{(l)}(j, j) \underbrace{p^{(m)}(j, i)}_{>0} \\ &= \underbrace{p^{(k)}(i, j)}_{>0} \underbrace{p^{(m)}(j, i)}_{>0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+m+k} \sum_{l=1}^n p^{(l)}(j, j) \\ &> 0 \end{aligned}$$

$\frac{1}{m(j, j)} > 0$
($\because j$ は正再帰的, m の性質より)

より i は正再帰的.

(2) $\rightarrow$ (3) $\forall \lambda$ が正再帰的なら. 直前の Lem より
ある定常分布が存在する.

(3) $\rightarrow$ (2)

既約性より. 定常分布 π に対し. $\pi(i) > 0$ なる $i \in I$ あり.

$\forall i \in I$ 2. $j \rightarrow i$ である. より. ある $n \in \mathbb{N}$ 2. $p^{(n)}(j, i) > 0$
とできる. より

$$\pi(i) = \sum_{j'} \pi(j') p^{(n)}(j', i) \geq \pi(j) p^{(n)}(j, i) > 0$$

となる. 一方. $\forall j \in I$ に対し

$$\pi(j) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \left(\sum_{k \in I} \pi(k) p^{(l)}(k, j) \right)$$

($\because \pi = \pi(j), \pi$ は定常分布 なること)

$$= \sum_{k \in I} \pi(k) \left(\frac{1}{n} \sum_{l=1}^n p^{(l)}(k, j) \right)$$

$$\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{優収束定理}} \sum_{k \in I} \pi(k) \frac{f(k, j)}{m(j, j)}$$

これと $\pi(i) > 0$ を合わせると、 $\frac{1}{m(i,i)} > 0$ である。

よって、 $m(i,i) < \infty$ 、つまり i は正再帰的。特に i は再帰的。

既約性と再帰性より、 $f(i,i) = 1$ (4p) となり、 $\pi(i) = \frac{1}{m(i,i)}$ が成り立つ。

(一意性) 上の議論で、 $\pi(i) = \frac{1}{m(i,i)}$ が $\frac{1}{\sum_j m(i,j)}$ であることから、
一意性も示すことができる。

Def (周期性)

i の周期 $d(i) = p^{(n)}(i,i) > 0$ なる $n \geq 1$ の最大公約数

Lem

$i \leftrightarrow j$ なら $d(i) = d(j)$ (周期はクラスの性質)

Thm (極限分布の存在条件)

マルコフ連鎖が既約であるとき。

連鎖が $\begin{cases} \text{正再帰的} \\ \text{非周期的} \end{cases} \iff \text{極限分布が存在}$

Note この極限分布は定常分布で $\pi(i) = \frac{1}{m(i,i)}$ である。

正再帰的なら定常分布が存在。

Lem 既約で正再帰的なマルコフ連鎖が非周期的なら
 $\forall i, j \in I$ で

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^{(n)}(i,j) = \frac{1}{m(i,i)} = \pi(i) \quad (\text{定常分布})$$

周期的 ($d(i) \geq 2$) なら、 $p^{(n)}(i,j)$ は収束しない。

(証明は、カッポネー法による。補足資料を参照のこと)

(Proof of Thm)

($\Rightarrow$) Lem 12 より.

($\Leftarrow$) 極限分布が存在すれば、定常分布が存在するので、正再帰的.

また、先の Lem 11 より 周期的なら $p^{(n)}(i,i)$ は収束せず.

極限分布が存在しないので、 $\exists$ 非周期的でなくともいけない.

Thm (大数の強法則)

既約かつ定常分布 π が存在すると、(極限分布の存在は仮定しない)

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ かつ $\sum_{i \in I} |f(i)| \pi(i) < \infty$ (つまり $E_{\pi}[|f(X)|] < \infty$)
可積分
なら、

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_k) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{a.s.}} E_{\pi}[f(X)] \quad (4.8)$$

* 大数の強法則により、MCMC 法が正当化される.